GRUPO B

B1. Un estudio reciente, realizado sobre 400 internautas de una región, de edades comprendidas entre 16 y 65 años, indica que 344 usan redes sociales.

a) Con una confianza del 97%, construir un intervalo de confianza para la proporción de internautas de la región que no usan redes sociales.

b) Si, para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales, se obtiene el intervalo $\left[0{,}826,\ 0{,}894\right]$. ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Si la población de la región, con edades entre 16 y 65 años, es de 400000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que no usan redes sociales?

B2. Se toma una muestra de 400 estudiantes al azar y se les pregunta por su gasto anual en libros y material escolar, obteniéndose una cantidad media de 132 €. Se sabe, además, que la desviación típica de este gasto en la población estudiantil es de 24 €.

a) Calcular un intervalo de confianza al 90% para la media poblacional de este gasto.

b) Calcular el tamaño muestral necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese $[128{,}71,\ 135{,}29]$.

B3. Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función:

$$D(t)=\begin{cases}-\dfrac{(t-2)^2}{4}+5, & t\in[0,4]\\[2ex] \dfrac{(t-7)^2}{9}+3, & t\in\left]4,10\right]\end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:

a) ¿Es continua $D(t)$? Representarla gráficamente.

b) ¿Es $D(t)$ derivable?

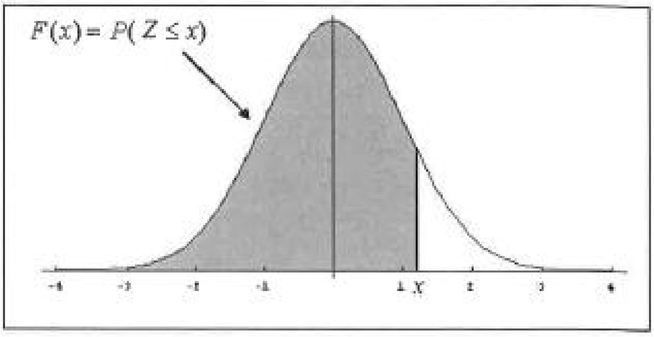
c) ¿Entre qué valores varía $D(t)$? ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento? ¿Cuándo alcanza los valores máximos y mínimos absolutos?

B4. En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120% del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.

a) Plantear el correspondiente sistema.

b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

Distrito Universitario de Canarias



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

GRUPO B

B1. Un estudio reciente, realizado sobre 400 internautas de una región, de edades comprendidas entre 16 y 65 años, indica que 344 usan redes sociales.
a) Con una confianza del 97%, construir un intervalo de confianza para la proporción de internautas de la región que no usan redes sociales.
b) Si, para estimar la proporción de internautas que usan redes sociales, se obtiene el intervalo $\left[0,826,\ 0,894\right]$. ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?
c) Si la población de la región, con edades entre 16 y 65 años, es de 400000 personas, usando el nivel de confianza del apartado b), ¿entre qué límites está el número de los que no usan redes sociales?

De 400 internautas 344 usan las redes sociales. 56 no usan las redes sociales.
La proporción de los internautas que no usan las redes sociales en la muestra de 400 internautas es $p=\frac{56}{400}=0,14$ y $1-p=1-0,14=0,86$

a)
Para un nivel de confianza del 0,97

1 – ∝ = 0,97 → ∝ = 0,03 →∝/2 = 0’015 →1 – ∝/2 = 0,985 → $z_{\alpha/2}$ **= 2,17**

El error viene dado por la fórmula $Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}=2,17\cdot\sqrt{\frac{0,14\cdot 0,86}{400}}=0,0376$

, por lo que el intervalo de confianza es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right)=\left(0,14-0,0376,\ 0,14+0,0376\right)=\left(0,1024,\ 0,1776\right).$$

b) El intervalo de confianza $\left[0,826,\ 0,894\right]$ tiene una amplitud de $0,894-0,826=0,068$.

Y el error es la mitad de dicha amplitud → $Error=\frac{0,068}{2}=0,034$

Sustituimos en la fórmula del error:

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\left(1-p\right)}{n}}=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{0,14\cdot 0,86}{400}}=0,034\Rightarrow z_{\alpha/2}=\frac{0,034}{\sqrt{\frac{0,14\cdot 0,86}{400}}}=1,96$$

Mirando en la tabla de la normal obtenemos que 1 – ∝/2 = 0,975 → ∝/2 = 0,025 →∝ = 0,05 →1– ∝ = 0,95
El nivel de confianza es del 95%.

c) Con el nivel de confianza del 95% el intervalo de confianza de la proporción de los que usan las redes es de $\left[0,826,\ 0,894\right]$. Por ello el número de internautas que usan las redes sociales están en el intervalo $\left[0,826\cdot 400000,\ 0,894\cdot 400000\right]=\left[330400, 357600\right]$.
Usan las redes entre 330400 y 357600.

No las usan entre 400000 –357600 = 42400 y 400000 – 330400 = 69600 internautas.

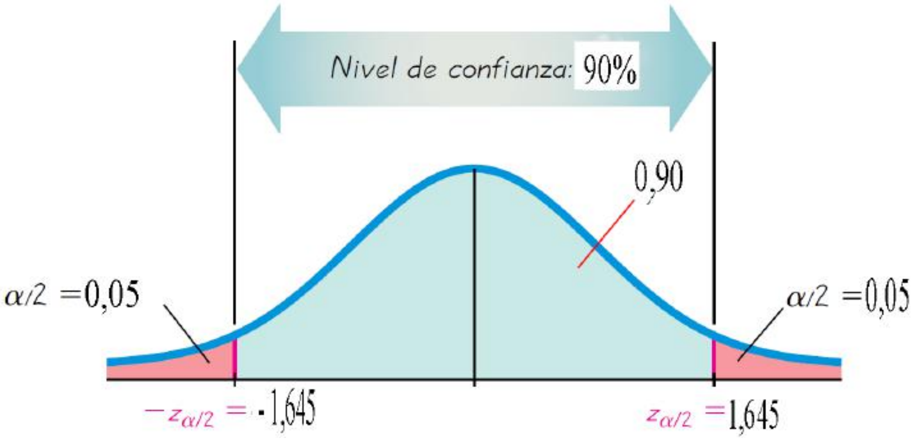
B2. Se toma una muestra de 400 estudiantes al azar y se les pregunta por su gasto anual en libros y material escolar, obteniéndose una cantidad media de 132 €. Se sabe, además, que la desviación típica de este gasto en la población estudiantil es de 24 €.
a) Calcular un intervalo de confianza al 90% para la media poblacional de este gasto.
b) Calcular el tamaño muestral necesario para que el correspondiente intervalo de confianza del apartado anterior fuese [128,71, 135,29].

a) X = Gasto anual en libros y material escolar.

n = 400 estudiantes. $\bar{x} = 132$ €

$X \approx N(\mu, 24)$

Para un nivel de confianza del 90%



$$1-\alpha = 0,90 \to \alpha = 0,1 \to \frac{\alpha}{2} = 0,05 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0,95 \to z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1,64+1,65}{2} = 1,645$$

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{24}{\sqrt{400}} = 1,974$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (132 - 1.974, 132 + 1.974) = (130.026, 133.974)$$

b) ¿n?

$X \approx N(\mu, 24)$

El intervalo de confianza tiene una amplitud de 135,29 – 128,71 = 6,58

El error es la mitad de dicha amplitud → Error = 3,29

Sustituimos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,645 \cdot \frac{24}{\sqrt{n}} = 3,29$$

$$\frac{24}{\sqrt{n}} = \frac{3,29}{1,645} \Rightarrow 24 = \frac{3,29}{1,645} \cdot \sqrt{n} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{24 \cdot 1,645}{3,29}$$

$$n = \left(\frac{24 \cdot 1,645}{3,29}\right)^2 = 144$$

El tamaño de la muestra debe de ser mayor de 144 estudiantes.

B3. Durante los últimos 10 años el déficit en las cuentas de una institución, en millones de euros, viene dado por la función:

$$D(t)=\begin{cases}-\dfrac{(t-2)^2}{4}+5, & t\in[0,4]\\[2mm] \dfrac{(t-7)^2}{9}+3, & t\in\,]4,10]\end{cases}$$

siendo t el tiempo en años. Justificando la respuesta:
a) ¿Es continua $D(t)$? Representarla gráficamente.
b) ¿Es $D(t)$ derivable?
c) ¿Entre qué valores varía $D(t)$? ¿Cuáles son sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento? ¿Cuándo alcanza los valores máximos y mínimos absolutos?

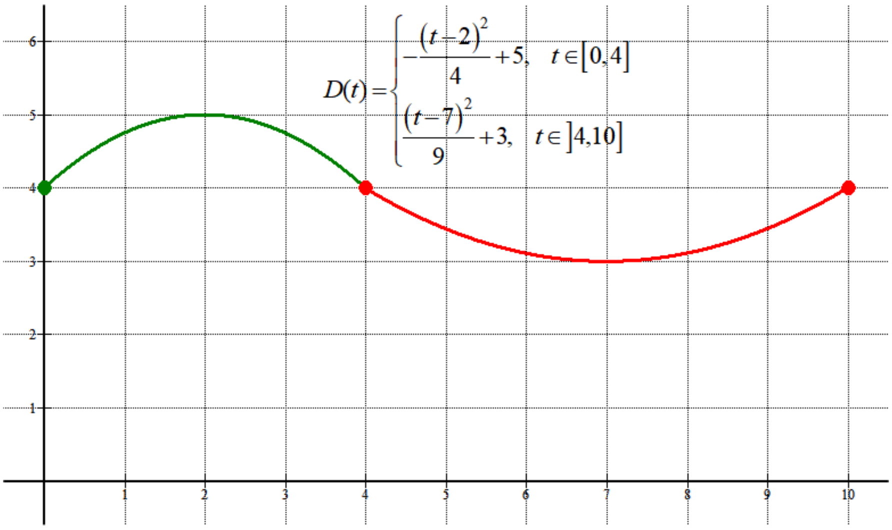
a) Para que sea continua debe serlo en *t = 4*.

- Existe $D(4)=-\dfrac{(4-2)^2}{4}+5=4$
- Existe $\lim\limits_{t\to 4}D(t)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{t\to 4^-}D(t)=\lim\limits_{t\to 4^-}-\dfrac{(t-2)^2}{4}+5=4\\[2mm] \lim\limits_{t\to 4^+}D(t)=\lim\limits_{t\to 4^+}\dfrac{(t-7)^2}{9}+3=4\end{array}\right\}=4$
- $D(4)=4=\lim\limits_{t\to 4}D(t)$

La función es continua en *t = 4* y en todo el intervalo [0, 4].
Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

t	$D(t)=-\dfrac{(t-2)^2}{4}+5$
0	4
1	4,75
2	5
3	4,75
4	4

t	$D(t)=\dfrac{(t-7)^2}{9}+3$
5	3,44
6	3,11
8	3,11
9	3,44
10	4



b) Es derivable en $[0,4)\cup(4,10]$ y la derivada es:

$$D(t)=\begin{cases}-\dfrac{(t-2)^2}{4}+5, & t\in[0,4]\\[2mm] \dfrac{(t-7)^2}{9}+3, & t\in\,]4,10]\end{cases}\Rightarrow D'(t)=\begin{cases}-\dfrac{2(t-2)}{4}, & t\in[0,4)\\[2mm] \dfrac{2(t-7)}{9}, & t\in(4,10]\end{cases}$$

Comprobamos si es derivable en $t = 4$ viendo si coinciden las derivadas laterales.

$$D'(4) = \left\{ \begin{array}{l} D'(4^-) = -\dfrac{2(4-2)}{4} = -1 \\ D'(4^+) = \dfrac{2(4-7)}{9} = -\dfrac{6}{9} = -\dfrac{2}{3} \end{array} \right\} \text{No son iguales}$$

La función no es derivable en $t = 4$.

La función es derivable en $[0,4)\cup(4,10]$

c) Si miramos su gráfica observamos que $D(t)$ varía entre 3 y 5 millones de euros. Crece en $[0,2)\cup(7,10)$ y decrece en $(2,7)$. Tiene un máximo absoluto en (2, 5) y un mínimo absoluto en (7, 3).

B4. En un hotel hay 400 turistas de españoles, alemanes e ingleses. El número de alemanes es el 120% del número de ingleses y estos últimos, sumados a los españoles, superan en 40 al número de alemanes.
a) Plantear el correspondiente sistema.
b) ¿Cuántos españoles, alemanes e ingleses hay en el hotel?

a) Llamamos "e" al número de turistas españoles, "a" al de alemanes e "i" al de ingleses.

"*Hay 400 turistas en total*" → $e+a+i=400$
"*El número de alemanes es el 120% del número de ingleses*" → $a=1,2i$
"Los ingleses sumados a los españoles superan en 40 a los alemanes" → $i+e=a+40$

Juntamos las tres ecuaciones en un sistema lineal de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} e+a+i=400 \\ a=1,2i \\ i+e=a+40 \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} e+a+i=400 \\ a=1,2i \\ i+e=a+40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Sustituimos "a" por "1,2i"} \\ \text{en ecuación 1}^{\text{a}} \text{ y } 3^{\text{a}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e+1,2i+i=400 \\ i+e=1,2i+40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} e+2,2i=400 \\ e-0,2i=40 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} e+2,2i=400 \\ -e+0,2i=-40 \end{array}\right\}$$

$$2,4i=360 \Rightarrow \boxed{i=\frac{360}{2,4}=150 \text{ } ingleses} \Rightarrow \boxed{a=1,2\cdot 150=180 \text{ } alemanes} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e+180+150=400 \Rightarrow \boxed{e=400-330=70 \text{ } españoles}$$

En el hotel hay 70 turistas españoles, 150 ingleses y 180 alemanes.