UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2019

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INDICACIONES

Elija una de las dos opciones.

No se admitirá ningún resultado si no está debidamente razonado.

No se permiten calculadoras gráficas, ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a internet.

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 puntos]

A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.

A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.

A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.

A3. [0,5 puntos] Resolverlo.

A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: B X B = B (X+A)

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [0,6 puntos] Las asíntotas.

C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.

D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.

E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

Ejercicio 3 [3 puntos]

De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,

A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?

B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?

C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1 [3,5 puntos]
A. [3 puntos] Una empresa que fabrica grapadoras debe satisfacer un pedido de 325 unidades que empaqueta en cajas de diferentes tamaños. Hay tres modelos de cajas, A, B y C, en los que caben, respectivamente, 5, 10 y 15 unidades. Se dispone de un total de 35 cajas. Además, el total de cajas de los modelos A y B es seis veces el número de cajas del modelo C.
A1. [1 punto] Plantear el sistema de ecuaciones que permite calcular el número de cajas de cada modelo que se pueden utilizar para enviar el pedido.
A2. [1 punto] Analizar la compatibilidad de dicho sistema.
A3. [0,5 puntos] Resolverlo.
A4. [0,5 puntos] ¿A cuánto ha ascendido la factura de compra de las cajas, sabiendo que una unidad del modelo A cuesta 4,5 euros; una del modelo B, 8 euros; y una del C, 12 euros?

B. [0,5 puntos] Despejar la incógnita X de la siguiente ecuación matricial: B X B = B (X+A)

A1. Llamemos x = número de cajas del modelo A, y = número de cajas del modelo B, z = número de cajas del modelo C.

- Son 325 unidades metidos en "***x***" cajas del modelo A (caben 5 unidades por caja), "***y***" cajas del modelo B (caben 10 unidades por caja) y "**z**" unidades del modelo C (caben 15 unidades por caja) → $325 = 5x + 10y + 15z$
- Hay un total de 35 cajas → $x + y + z = 35$.
- El total de cajas de los modelos A y B ($x + y$) es seis veces el número de cajas del modelo C (z) → $x + y = 6z$

Ponemos juntas estas condiciones y tenemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 325 = 5x + 10y + 15z \\ x + y + z = 35 \\ x + y = 6z \end{array}\right\}$$

A2. Utilicemos Gauss para discutir el sistema que simplificado y ordenado queda:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 65 \\ x + y + z = 35 \\ x + y - 6z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & +z & = 35 \\ -x & -2y & -3z & = -65 \\ \hline & -y & -2z & = -30 \end{array} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrr} x & +y & -6z & = 0 \\ -x & -2y & -3z & = -65 \\ \hline & -y & -9z & = -65 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 65 \\ -y - 2z = -30 \\ -y - 9z = -65 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 65 \\ -y - 2z = -30 \\ y + 9z = 65 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrr} y & +9z & = 65 \\ -y & -2z & = -30 \\ \hline & 7z & = 35 \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 65 \\ -y - 2z = -30 \\ 7z = 35 \end{array}\right\} \Rightarrow \{Simplificamos\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 65 \\ y + 2z = 30 \\ z = 5 \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible determinado, tiene una única solución.

A3. Sigamos con la resolución.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+3z=65 \\ y+2z=30 \\ \boxed{z=5} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+15=65 \\ y+10=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=50 \\ \boxed{y=20} \end{array}\right\} \Rightarrow x+40=50 \Rightarrow \boxed{x=10}$$

La solución es $x=10, \quad y=20, \quad z=5$

A4. Con los datos proporcionados la factura será de:

$$\left.\begin{array}{l} x=10 \text{ cajas del modelo A a 4,5€} \\ y=20 \text{ cajas del modelo B a 8€} \\ z=5 \text{ cajas del modelo C a 12€} \end{array}\right\} \Rightarrow 10\cdot 4,5+20\cdot 8+5\cdot 12=45+160+60=\boxed{265€}$$

B. Si suponemos B una matriz invertible, siendo B^{-1} su matriz inversa, se despejaría:

$$B\ X\ B=B(X+A) \Rightarrow B^{-1}B\ X\ B=B^{-1}B(X+A) \Rightarrow X\ B=X+A$$

$$X\ B-X=A \Rightarrow X(B-I)=A \Rightarrow \boxed{X=A(B-I)^{-1}}$$

Hemos supuesto también que la matriz $(B-I)$ es invertible.

Ejercicio 2 [3,5 puntos] Dada la función: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

A. [0,2 puntos] Su dominio y los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [0,6 puntos] Las asíntotas.
C. [1,1 puntos] Los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos que existan.
D. [1,1 puntos] Determinar los intervalos de concavidad y convexidad y los puntos de inflexión que existan.
E. [0,5 puntos] Finalmente, con los datos obtenidos en los apartados anteriores, dibujar su gráfica.

A. La función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$ tiene como dominio $\mathbb{R}-\{-2,2\}$, ya que estos valores excluidos anulan el denominador y por tanto no tienen imagen.

$$f(-2)=\frac{4+1}{4-4}=\frac{5}{0}=\text{No existe} \qquad f(2)=\frac{4+1}{4-4}=\frac{5}{0}=\text{No existe}$$

Los puntos de corte con el eje OY:

$$x=0\Rightarrow f(0)=\frac{0+1}{0-4}=-\frac{1}{4}=-0,25$$ El punto de corte es P(0, –0´25)

Los puntos de corte con el eje OX:

$$y=0\Rightarrow 0=\frac{x^2+1}{x^2-4}\Rightarrow x^2+1=0\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\sqrt{-1}=\text{No existe}$$

No hay puntos de corte con el eje de abscisas.

B. Asíntotas verticales. $x=2;\quad x=-2$. Al ser estos los valores excluidos del dominio.

Asíntotas horizontales. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

La asíntota horizontal es $y=1$

Asíntota oblicua. Al tener asíntota horizontal no tiene oblicua.

C. Para estudiar el crecimiento o decrecimiento necesitamos la derivada.

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-4}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-2x\left(x^2+1\right)}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-8x-\cancel{2x^3}-2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2}=0\Rightarrow -10x=0\Rightarrow x=0$$

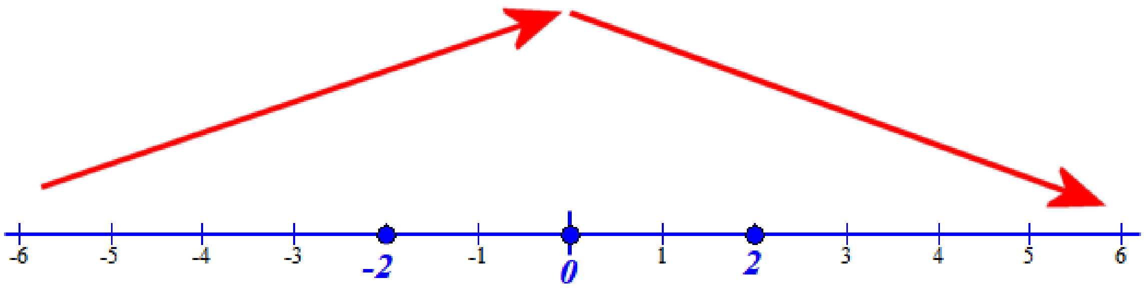
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de 0.

En $(-\infty,-2)$ tomo x = –3 y la derivada vale $f'(-3)=\dfrac{30}{(9-4)^2}>0$ la función crece.

En $(-2,0)$ tomo x = –1 y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{20}{(1-4)^2}>0$ la función crece.

En $(0,2)$ tomo x = 1 y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-10}{(1-4)^2}<0$ la función decrece.

En $(2,+\infty)$ tomo x = 3 y la derivada vale $f\,'(3)=\frac{-30}{(9-4)^2}<0$ la función decrece.



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$.
Tiene un máximo relativo en *x = 0*.

D. Para estudiar la concavidad o convexidad necesitamos la segunda derivada.

$$f\,'(x)=\frac{-10x}{\left(x^2-4\right)^2}\Rightarrow f\,''(x)=\frac{-10\left(x^2-4\right)^2-(-10x)2\left(x^2-4\right)2x}{\left(x^2-4\right)^4}=\frac{-10\left(x^2-4\right)^2+40x^2\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^4}$$

$$f\,''(x)=\frac{-10\cancel{\left(x^2-4\right)}\left[\left(x^2-4\right)-4x^2\right]}{\left(x^2-4\right)^{\cancel{4}\to 3}}=\frac{-10\left(-3x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}$$

Si igualamos a cero.

$$f\,''(x)=0\Rightarrow\frac{-10\left(-3x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}=0\Rightarrow-10\left(-3x^2-4\right)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-3x^2-4=0\Rightarrow-3x^2=4\Rightarrow x^2=\frac{4}{-3}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{-4}{3}}=\text{No existe}$$

No hay puntos de inflexión.

Veamos el signo de la derivada segunda antes de –2, entre –2 y 2, por último después de 2.

En $(-\infty,-2)$ tomamos x = –3 la derivada segunda vale $f\,''(-3)=\frac{-10(-27-4)}{(9-4)^3}=\frac{310}{125}>0$ y la función es convexa ($\cup$).

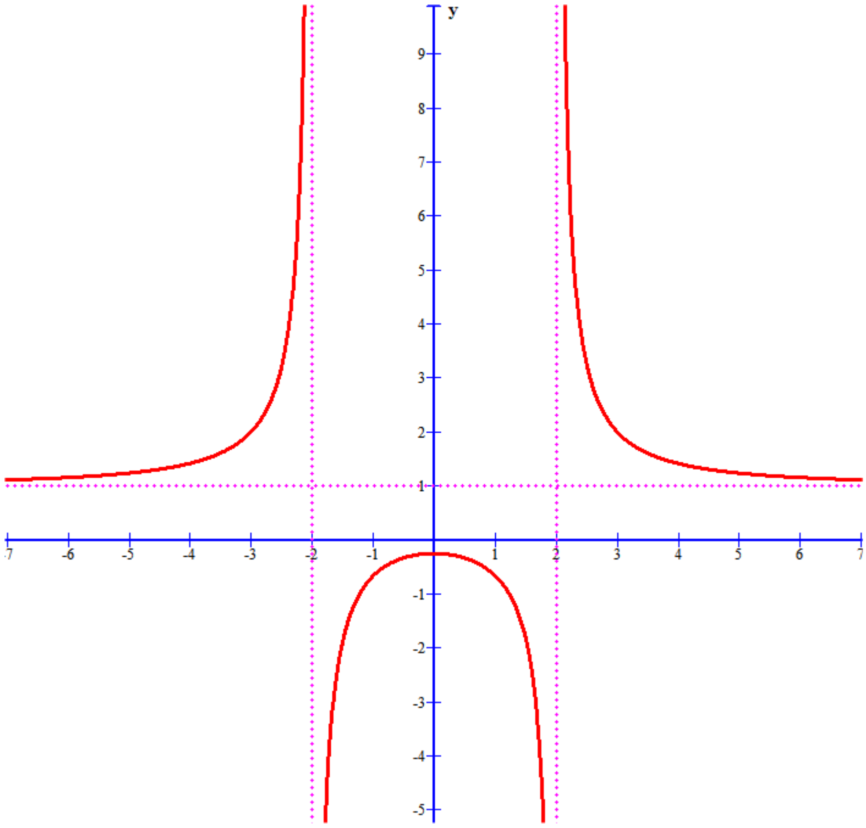
En $(-2,2)$ tomamos x = 0 la derivada segunda vale $f\,''(0)=\frac{-10(-4)}{(0-4)^3}=\frac{40}{-64}<0$ y la función es cóncava $(\cap)$.

En $(2,+\infty)$ tomamos x = 3 la derivada segunda vale $f\,''(3)=\frac{-10(-27-4)}{(9-4)^3}=\frac{310}{125}>0$ y la función es convexa ($\cup$).

La función es cóncava $(\cap)$ en $(-2,2)$ y convexa ($\cup$) en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$. No tiene puntos de inflexión.

E. Hacemos una tabla de valores y con los datos obtenidos podemos dibujar la gráfica.

x	$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$
-4	$\dfrac{17}{12}=1,41$
-3	$\dfrac{10}{5}=2$
-1	$\dfrac{2}{-3}=-0,66$
0	$\dfrac{-1}{4}=-0,25$
3	2
4	$1,41$



Ejercicio 3 [3 puntos]
De los 360 alumnos de nuevo ingreso de la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, conocemos el número de matriculados en el Centro de Idiomas de la Universidad. Los datos completos aparecen en la siguiente tabla:

	Matriculados en C. de Idiomas	No matriculados en C. de Idiomas	Total
G. Económicas	57	63	120
G. Adm. y D. Empresas	106	134	240
Total	163	197	360

Elegido un alumno al azar,
A. [1 punto] ¿Calcular la probabilidad de que no esté matriculado en el Centro de Idiomas?
B. [1 punto] Si sabemos que el alumno pertenece al Grado en Económicas, ¿cuál es la probabilidad de que esté inscrito en el Centro de Idiomas?
C. [1 punto] Calcular la probabilidad de que sea del Grado en Administración y D. de Empresas y no esté inscrito en el Centro de Idiomas.

A. $P(\text{No esté matriculado en el C. de Idiomas})=\dfrac{197}{360}=\boxed{0,547}$

B. $P(\text{Esté en el C. de Idiomas / Está en el G. Económicas})=\dfrac{57}{120}=\boxed{0,475}$

C. $P(\text{Esté en G. Adm. y D. Empresas}\cap\text{No esté en C. de Idiomas})=\dfrac{134}{360}=\boxed{0,372}$