Prueba de Evaluación de Bachillerato para el acceso a la Universidad de Extremadura

Curso 2018-2019

Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II   Tiempo máximo de la prueba: 1h 30m

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro *x* no existe $(A\cdot B)^{-1}$. **(2 puntos)**

(b) Hallar la matriz inversa de $A\cdot B$ para *x* = l. **(1.5 puntos)**

PROBLEMA 2

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x)=\begin{cases}3+Ax & si \quad 2\le x\le 5\\ 53+2x+Bx^2 & si \quad 5< x\le 8\end{cases}$$

siendo *F(x)* la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y *x* el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes *A* y *B*. **(2 puntos)**

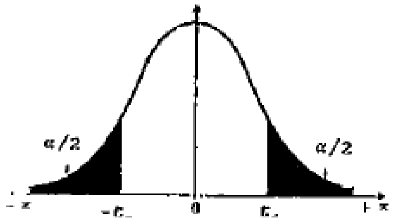
(b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2-3x-4)$ en el intervalo [2, 5]. **(1 punto)**

PROBLEMA 3

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad. **(2.5 puntos)**

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5? **(1 punto)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

OPCIÓN B

PROBLEMA 1

Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$$

se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar para qué valor del parámetro x no existe $(A\cdot B)^{-1}$. **(2 puntos)**

(b) Hallar la matriz inversa de $A\cdot B$ para x = l. **(1.5 puntos)**

a) Para que no exista la inversa $(A\cdot B)^{-1}$ debe ser su determinante nulo $|A\cdot B|=0$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0-1+2x & 1+0+2\\ 0+0-x & 2+0-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1+2x & 3\\ -x & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{(2\times 3)\ \cdot\ (3\times 2)\ =\ 2\times 2}$$

$$|A\cdot B|=0\Rightarrow\begin{vmatrix}-1+2x & 3\\ -x & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -1+2x+3x=0\Rightarrow -1+5x=0\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{5}}$$

No existe inversa para $x=\frac{1}{5}$

b) Para x = l el producto $A\cdot B$ queda

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-1+2 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Su determinante vale:

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1+3=4\neq 0$$

Calculamos su inversa con la fórmula

$$(A\cdot B)^{-1}=\frac{Adj\left((A\cdot B)^t\right)}{|A\cdot B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}}{4}=\frac{\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}}{4}=\begin{pmatrix}1/4 & -3/4\\ 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^{-1}=\begin{pmatrix}1/4 & -3/4\\ 1/4 & 1/4\end{pmatrix}$$

PROBLEMA 2

El precio de cada acción de una determinada empresa oscila entre 2 y 8 euros. La facturación de dicha empresa en bolsa depende del precio de la acción y viene dada por la función:

$$F(x)=\begin{cases}3+Ax & si \quad 2\le x\le 5\\ 53+2x+Bx^2 & si \quad 5<x\le 8\end{cases}$$

siendo *F(x)* la facturación de la empresa en bolsa (en miles de euros) y *x* el precio de la acción (en euros). Se sabe que para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros y que la función es continua. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Determinar las constantes *A* y *B*. **(2 puntos)**

(b) Calcular las asíntotas verticales de la función $F(x)/(x^2-3x-4)$ en el intervalo [2, 5]. **(1 punto)**

(a) Como para un precio de la acción de 5 euros la facturación es de 13 mil euros, esto significa que $F(5)=13 \Rightarrow 3+5A=13 \Rightarrow 5A=10 \Rightarrow \boxed{A=\frac{10}{5}=2}$

Para que la función sea continua en x = 5 debe cumplirse:

- Existe $F(5)=13$
- Existe $\lim_{x\to 5^-} F(x)=\lim_{x\to 5^-} 3+2\cdot 5=13$
- $\lim_{x\to 5^+} F(x)=\lim_{x\to 5^-} 53+2x+Bx^2=53+10+25B=25B+63$
- Los tres valores deben ser iguales. $25B+63=13 \Rightarrow 25B=-50 \Rightarrow \boxed{B=-\frac{50}{25}=-2}$

Los valores buscados son $A=2 \ y \ B=-2$.

(b) Buscamos las asíntotas de la función $f(x)=\frac{F(x)}{x^2-3x-4}=\frac{3+2x}{x^2-3x-4}$.

Hallamos primero el dominio, que son todos los números reales del intervalo [2, 5] menos los valores que anulan el denominador.

$$x^2-3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{3\pm 5}{2}=\begin{cases}=\frac{3+5}{2}=4\\ =\frac{3-5}{2}=-1\end{cases}$$

De estos dos valores solo incluimos el x = 4, ya que el x = –1 no está en el intervalo [2, 5].

$$Dominio=[2,\ 4)\cup(4,\ 5]$$

Asíntotas verticales. $x=a$.

La asíntota vertical es $x=4$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{3+2x}{x^2-3x-4}=\frac{11}{0}=\infty$$

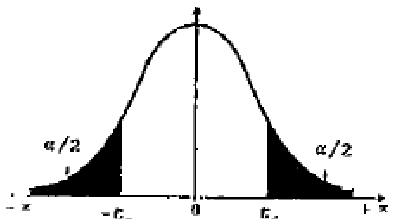
$$\lim_{x\to 4^+}\frac{3+2x}{x^2-3x-4}=\frac{11}{0}=\infty$$

PROBLEMA 3

El tiempo, en horas, que tarda cierta compañía telefónica en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono sigue una distribución normal con desviación típica 24 horas. Se pregunta a 100 clientes por el tiempo invertido en la portabilidad, obteniéndose una media de 36 horas. Se pide, justificando las respuestas:

(a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % para la media de tiempo que tarda dicha compañía en hacer efectiva la portabilidad. **(2.5 puntos)**

(b) ¿Cuál debe ser el tamaño muestral para que el intervalo tenga una longitud de 5? **(1 punto)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Sea X = Tiempo en horas que tarda en hacer efectiva la portabilidad de un número de teléfono.

X = N(μ, 24)

(a)

$\bar{x} = 36\,h; \quad n = 100$

El nivel de confianza del 95% significa que

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2}$ **= 1,96**

El error es

$$E = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow E = 1{,}96\cdot\frac{24}{\sqrt{100}} = 4{,}704$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(36 - 4{,}704,\ 36 + 4{,}704\right)$$

El intervalo de confianza es $\left(31'296,\ 40'704\right)$

(b) Como la amplitud del intervalo es 5 el error es la mitad, es decir, 2,5 h entonces:

$$z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2{,}5 \Rightarrow 1{,}96\cdot\frac{24}{\sqrt{n}} = 2{,}5 \Rightarrow 1{,}96\cdot\frac{24}{2{,}5} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(1{,}96\cdot\frac{24}{2{,}5}\right)^2 = 354{,}04$$

El tamaño mínimo de la muestra es 355 individuos.