OPCIÓN B

1. Una tienda deportiva desea liquidar 2 000 camisetas y 1 000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.

a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.

b) Representa la región factible.

c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

2. Dada la función $f(x)=x^2-6x+8$.

a) Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.

3. En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres.

a) Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

b) Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B.

4. Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta general?

b) ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

OPCIÓN B

1. Una tienda deportiva desea liquidar 2 000 camisetas y 1 000 chándales de la temporada anterior. Para ello lanza dos ofertas, 1 y 2. La oferta 1 consiste en un lote de una camiseta y un chándal, que se vende a 30 €; la oferta 2 consiste en un lote de tres camisetas y un chándal, que se vende a 50 €. No se desea ofrecer menos de 200 lotes de la oferta 1 ni menos de 100 de la oferta 2.
a) Plantea el problema que permite determinar cuántos lotes de cada tipo debe vender para maximizar los ingresos.
b) Representa la región factible.
c) ¿Cuántos lotes ha de vender de cada tipo para maximizar los ingresos? ¿A cuánto ascienden dichos ingresos?

a) Llamemos x = número de lotes con la oferta 1 e y = número de lotes con la oferta 2.

Como hay 2000 camisetas y el lote 1 lleva una y el lote 2 lleva 3, obtenemos la primera restricción: $x+3y\leq 2000$.

Como hay 1000 chándales y las ofertas 1 y 2 levan 1 cada una, obtenemos la siguiente restricción: $x+y\leq 1000$.

Se va a ofrecer más de 200 lotes de la oferta 1: $x\geq 200$.

Y más de 100 lotes de la oferta 2: $y\geq 100$.

Todas las restricciones que determinan la región factible son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x+3y\leq 2000 \\ x+y\leq 1000 \\ x\geq 200 \\ y\geq 100 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las restricciones e identificamos la región factible:

Realizamos una tabla para las rectas asociadas a cada restricción.

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=2000 \\ x+y=1000 \\ x=200 \\ y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{2000-x}{3} \\ y=1000-x \\ x=200 \\ y=100 \end{array}\right\}$$

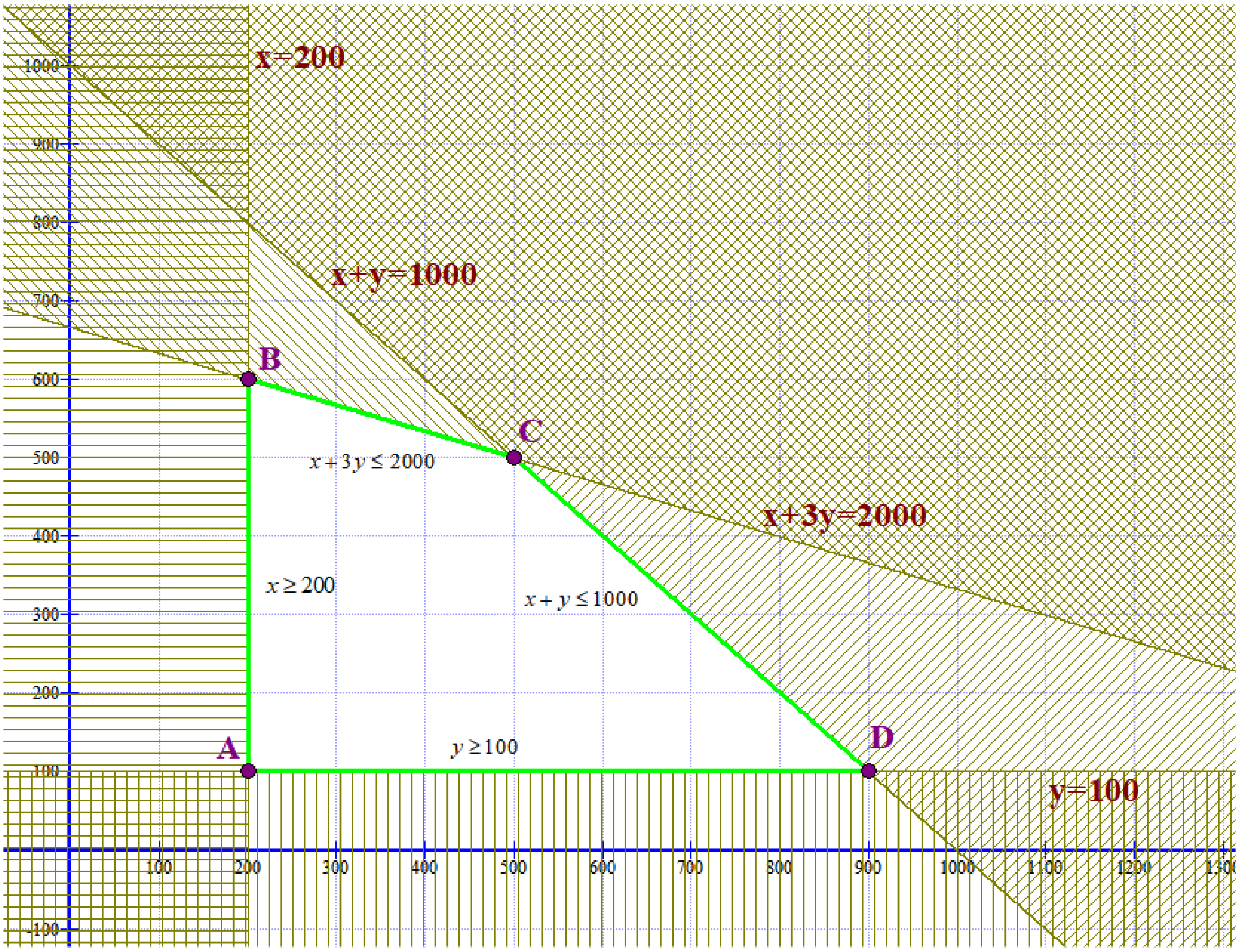
x	$y=1000-x$
0	1000
1000	0
500	500
200	800

x	$y=\dfrac{2000-x}{3}$
200	600
500	500

$x=200$	y
200	0
200	600

x	$y=100$
0	100
200	100

La región factible es la región en blanco.



Calculamos las coordenadas de los vértices:

$$\left.\begin{array}{l} x=200 \\ y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow A(200,100)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=2000 \\ x=200 \end{array}\right\} \Rightarrow 200+3y=2000 \Rightarrow y=600 \Rightarrow B(200,600)$$

$$\left.\begin{array}{l} x+3y=2000 \\ x+y=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3y=2000 \\ y=1000-x \end{array}\right\} \Rightarrow x+3000-3x=2000 \Rightarrow -2x=-1000$$

$$x=500 \Rightarrow y=1000-500=500 \Rightarrow C(500,500)$$

$$\left.\begin{array}{l} y=100 \\ x+y=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow x+100=1000 \Rightarrow x=900 \Rightarrow D(900,100)$$

c) La función de ingresos sería la siguiente: $I(x,y)=30x+50y$

Ahora calculamos en cuál de los vértices toma esta función el valor máximo:

A(200, 100) → $I(200,100)=6000+5000=11000€$

B(200, 600) → $I(200,600)=6000+30000=36000€$

C(500, 500) → $I(500,500) = 15000 + 25000 = 40000€$

D(900, 100) → $I(900,100) = 27000 + 5000 = 32000€$

El valor máximo se alcanza en el punto D(500, 500). Para maximizar los ingresos se deberían vender 500 lotes de la oferta 1 y otros 500 de la oferta 2. Con esas ventas los ingresos ascenderían a 40 000 €.

2. Dada la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$.
a) Realiza su representación gráfica estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremo relativo.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función y los ejes de coordenadas.

a) Como la función es una ecuación de segundo grado, se trata de una parábola:

Puntos de corte con el eje OX: y = 0

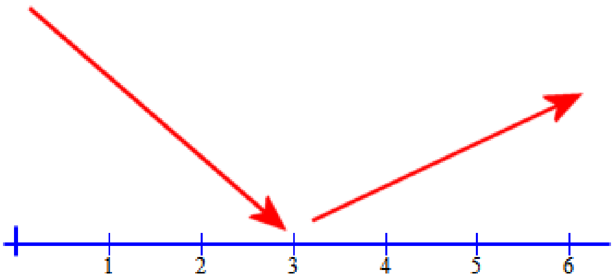
$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x = \frac{6-2}{2} = 2 \\ x = \frac{6+2}{2} = 4 \end{cases}$$ → Puntos de corte: A(2,0) y B(4,0)

Puntos de corte con el eje OY: x = 0

$f(0) = 0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 8$ →Punto de corte C(0,8)

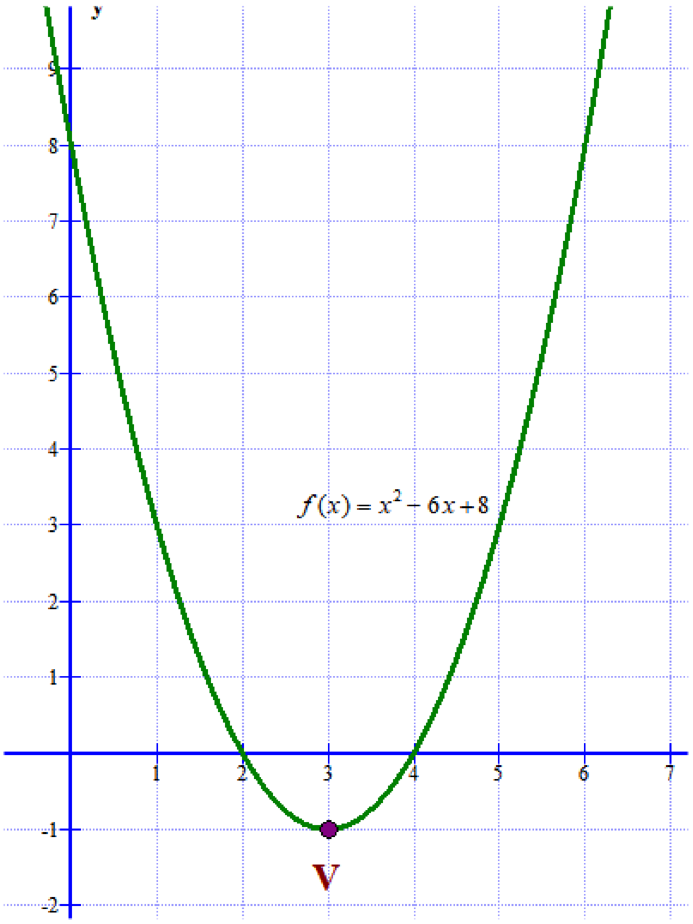
Monotonía y extremos relativos:

$f(x) = x^2 - 6x + 8 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6$
Igualamos la derivada a cero.
$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{2} = 3$
El extremo relativo está en x =3. Veamos como crece o decrece la función:
En (–∞, 3) tomamos x = 0 y $f'(0) = 0 - 6 = -6 < 0$. La función decrece.
En (3, +∞) tomamos x = 4 y $f'(4) = 8 - 6 = 2 > 0$. La función crece.

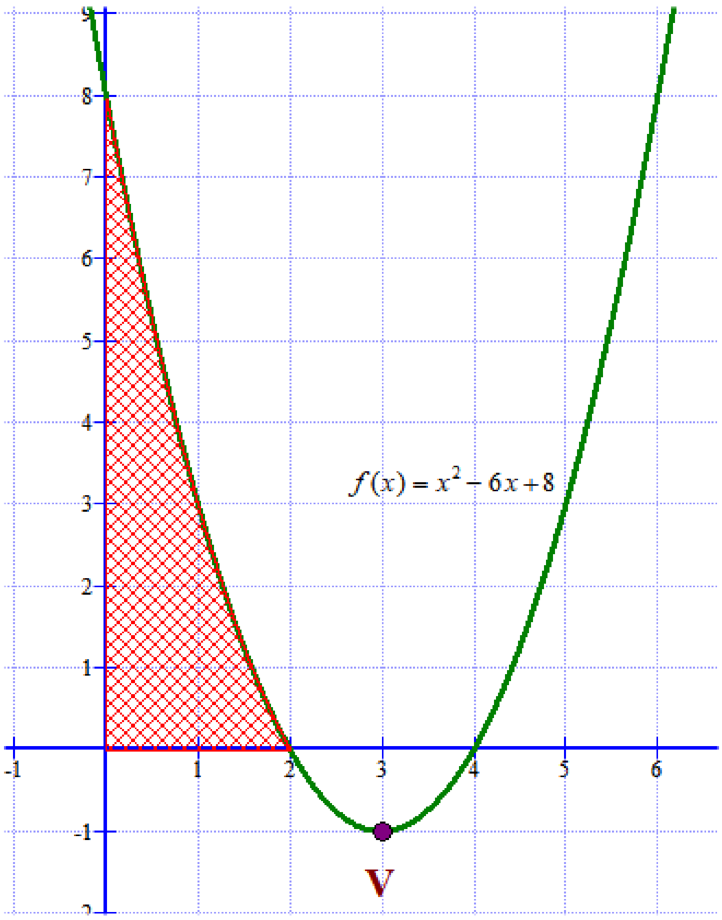


La función presenta un mínimo en x = 3. Vértice (3, –1)
Para representarla hacemos una pequeña tabla de valores:

x	$y = x^2 - 6x + 8$
3	-1
0	8
4	0
2	0



b) Identificamos la región cuya área deseamos calcular:

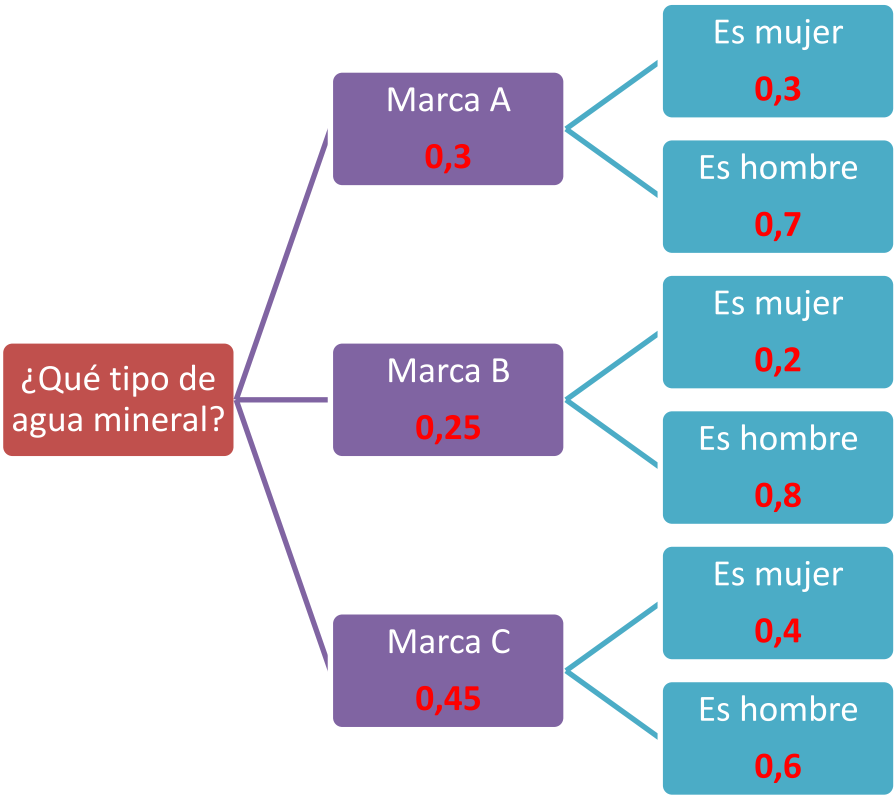


Como se ve en el dibujo, el área queda determinada por la parábola, por el eje OX (y = 0) y por el eje OY (x = 0). Este área, si contamos cuadraditos es aproximadamente 6 u^2.
Calculamos con más precisión el área sombreada mediante una integral definida:

$$\acute{A}rea = \int_0^2 x^2 - 6x + 8dx = \left[\frac{x^3}{3} - 6\frac{x^2}{2} + 8x\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_0^2 =$$
$$= \left[\frac{2^3}{3} - 3\cdot 2^2 + 16\right] - \left[\frac{0^3}{3} - 0 + 0\right] = \frac{8}{3} - 12 + 16 = \frac{20}{3} = \boxed{6,66\,u^2}$$

3. En una población, de cada 100 consumidores de agua mineral 30 consumen la marca A, 25 la marca B y el resto la marca C. Además, el 30% de consumidores de A, el 20% de consumidores de B y el 40% de consumidores de C son mujeres.
a) Se selecciona al azar un consumidor de agua mineral de esa población: ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?
b) Si se ha seleccionado al azar una mujer, halla la probabilidad de que consuma la marca B.

Podemos ordenar estos datos en un diagrama de árbol:



La probabilidad de que sea mujer es una probabilidad total, porque hay mujeres que consumen la marca A, la B y la C.

$$P(\text{Sea mujer}) = P(\text{Consume marca A y es mujer}) +$$
$$+P(\text{Consume marca B y es mujer}) + P(\text{Consume marca C y es mujer}) =$$
$$= P(\text{Consume marca A})P(\text{Es mujer / Consume marca A}) +$$
$$+P(\text{Consume marca B})P(\text{Es mujer / Consume marca B}) +$$
$$+P(\text{Consume marca C})P(\text{Es mujer / Consume marca C}) =$$
$$= 0,3\cdot 0,3 + 0,25\cdot 0,2 + 0,45\cdot 0,4 = 0,09 + 0,05 + 0,18 = \boxed{0,32}$$

La probabilidad de que, seleccionado al azar un consumidor de agua mineral en esa población, sea mujer es de 0,32.

a) Ahora nos piden calcular una probabilidad condicionada:

$$P(\text{Consume marca B / Es mujer}) = \frac{P(\text{Consume marca B y Es mujer})}{P(\text{Es mujer})} =$$

$$= \frac{0,25 \cdot 0,2}{0,32} = \frac{0,05}{0,32} = \frac{5}{32} = \boxed{0,16}$$

La probabilidad de que consuma la marca B sabiendo que es mujer es de 0,16.

4. Después de años de utilizarlo se sabe que la puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial sigue una distribución normal de media 74 y desviación típica 16. En una empresa se decide realizarlo a 100 de sus empleados.
a) ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga una media muestral superior a 78 puntos, de seguirse la pauta general?
b) ¿Y la probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 puntos?

a) Sea X = "puntuación de un test de uso habitual en cierta rama industrial" .
X = N(74, 16).
Se toma una muestra de 100 empleados de una empresa, y la media muestral será:

$$\overline{X_{100}} = N\left(74, \frac{16}{\sqrt{100}}\right) \Rightarrow \overline{X_{100}} = N(74, 1.6)$$

Con esta distribución normal calculamos la probabilidad pedida:

$$P\left(\overline{X_{100}} > 78\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{100}} - 74}{1,6} > \frac{78-74}{1,6}\right) = P(Z > 2,5) =$$

$$= 1 - P(Z < 2,5) = \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la tabla}\\ \text{de la N(0,1)}\end{array}\right\} = 1 - 0,9938 = \boxed{0,0062}$$

La probabilidad de obtener una media muestral superior a 78 es 0,0062.

b) Planteamos y resolvemos:

$$P\left(\overline{X_{100}} < 74\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{\overline{X_{100}} - 74}{1,6} < \frac{74-74}{1,6}\right) = P(Z < 0) =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{Buscamos en la tabla}\\ \text{de la N(0,1)}\end{array}\right\} = \boxed{0,5}$$

La probabilidad de que la media muestral sea inferior a 74 es 0,5.

OTRA FORMA DE HACERLO

Podríamos haber razonado de forma más simple al darnos cuenta de que ese valor (74) es la media de la distribución, por lo que está en el centro de la distribución y deja la mitad por encima y la otra mitad por debajo. Es decir, $P\left(\overline{X_{100}} < 74\right) = P\left(\overline{X_{100}} < \mu\right) = \frac{1}{2} = 0,5$