Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat

Matemàtiques Aplicades a les Ciències Socials II

Model 2
Contestau de manera clara i raonada quatre qüestions qualssevol, escollides d'entre todes les proposades en les opcions, A i B, conjuntament. Es disposa de 90 minuts.
Cada qüestió es puntua sobre 10 punts. La qualificació final s'obté de dividir el total entre 4. Es valoraran la correcció i la claredat en el llenguatge (matemàtic i no matemàtic) emprat per l'alumne. Es valoraran negativament els errors de càlcul.
Podeu utilitzar calculadora de qualsevol tipus, científica, gràfica o programable, però no s'autoritzará l'ús de les que portin informació emmagatzemada o puguin transmetre-la.

OPCIÓ A

1 Donat el sistema següent:

$$x+(a+1)y=1$$
$$ax+2y=-2$$

a) Discutiu el sistema en funció del parámetre a. (6 punts)
b) Resoleu-lo per a $a=-2$. (4 punts)

2 En una empresa es poden produir fins a 500 taules cada mes. La funció de costs en relació amb el nombre *q* de taules produïdes és

$$C(q)=q^3/50+8q+40$$

Si q és el nombre de taules produïdes, el cost mitjá de cada taula s'expressa mitjançant la funció

$$Q(q)=C(q)/q$$

a) Caculau el cost mitjá de cada taula, si l'empresa en produeix 5. I si en produeix 20? (3 punts)
b) Determinau quantes taules cal produir perqué el cost mitjá sigui mínim. Justificau que es tracta
efectivament d'un mínim i calculau aquest cost mitjá. (7 punts)

3 Donades les funcions $f(x)=-x^2+5 \quad i \quad g(x)=x^2-a, \quad on\ a\in\mathbb{R}$.

a) Trobau tots els possibles valors de *a* perqué *f(x)* i *g(x)* s'intersequin. (3 punts)
b) Per a $a=3$, dibuixau el recinte tancat entre els gràfics de *f(x)* i *g(x),* identificant els punts d'intersecció. (3 punts)
c) Per a $a=3$, calculau l'área d'aquest recinte interior. (4 punts)

4 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.

a) Obteniu un interval de confiança al 95 % per a l'edat mitjana de la població. (5 punts)
b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana amb un nivell de confiança del 99%, l'error comés sigui inferior a 0.5 anys? (5 punts)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal N(0, 1)

SOLUCIONES

OPCIÓ A

1 Donat el sistema següent:

$$x+(a+1)y=1$$
$$ax+2y=-2$$

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre a. (6 punts)
b) Resoleu-lo per a $a=-2$. (4 punts)

a) Despejamos en el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+(a+1)y=1 \\ ax+2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-(a+1)y \\ ax+2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a\left(1-(a+1)y\right)+2y=-2 \Rightarrow a-a^2y-ay+2y=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-a^2-a+2\right)y=-2-a$$

Para poder despejar la "y" debe ser $-a^2-a+2\neq 0$

Veamos cuando es cero → $-a^2-a+2=0 \Rightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{-2}=\begin{cases} \dfrac{1+3}{-2}=-2=a \\ \dfrac{1-3}{-2}=1=a \end{cases}$

Distinguimos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq -2 \ y \ a\neq 1$

En este caso $-a^2-a+2\neq 0$ y se puede despejar de la ecuación:

$$\left(-a^2-a+2\right)y=-2-a \Rightarrow y=\frac{-2-a}{-a^2-a+2}.$$

El sistema es **compatible determinado**.

CASO 2. $a=1$.

En este caso $-a^2-a+2=0$ y la última ecuación queda:

$$\left.\begin{array}{l} \left(-a^2-a+2\right)y=-2-a \\ a=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=-3 \text{ Igualdad imposible.}$$

El sistema es **incompatible**.

CASO 3. $a=-2$

En este caso $-a^2-a+2=0$ y la última ecuación queda

$$\left.\begin{array}{l} \left(-a^2-a+2\right)y=-2-a \\ a=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=0 \text{ Desaparece una ecuación.}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

b) Para $a=-2$ el sistema queda:

$$\left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ -2x+2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y=1 \\ x-y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow x-y=1 \Rightarrow x=1+y$$

Las soluciones son $\boxed{x=1+t; \quad y=t \qquad t\in\mathbb{R}}$

2 En una empresa es poden produir fins a 500 taules cada mes. La funció de costs en relació amb el nombre q de taules produïdes és

$$C(q) = q^3/50 + 8q + 40$$

Si q és el nombre de taules produïdes, el cost mitjá de cada taula s'expressa mitjançant la funció

$$Q(q) = C(q)/q$$

a) Caculau el cost mitjá de cada taula, si l'empresa en produeix 5. I si en produeix 20? (3 punts)
b) Determinau quantes taules cal produir perqué el cost mitjá sigui mínim. Justificau que es tracta efectivament d'un mínim i calculau aquest cost mitjá. (7 punts)

a) El coste medio de una mesa es:

$$Q(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{\frac{q^3}{50} + 8q + 40}{q} = \frac{q^3}{50q} + \frac{8q}{q} + \frac{40}{q} = \frac{q^2}{50} + 8 + \frac{40}{q}$$

Si se producen 5 mesas el coste medio de cada mesa es

$$Q(5) = \frac{5^2}{50} + 8 + \frac{40}{5} = 0.5 + 8 + 8 = 16.5$$

Si se producen 20 mesas el coste medio de cada mesa es

$$Q(20) = \frac{20^2}{50} + 8 + \frac{40}{20} = 8 + 8 + 2 = 18$$

b) Para determinar el mínimo derivamos la función coste medio.

$$Q(q) = \frac{q^2}{50} + 8 + \frac{40}{q} = \frac{1}{50}q^2 + 8 + 40q^{-1} \Rightarrow Q'(q) = \frac{1}{50}2q + 0 - 40q^{-2} = \frac{q}{25} - \frac{40}{q^2}$$

Igualamos a cero, en busca de los puntos críticos.

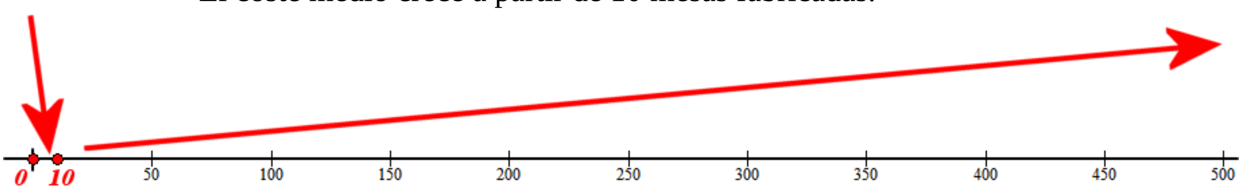
$$Q'(q) = 0 \Rightarrow \frac{q}{25} - \frac{40}{q^2} = 0 \Rightarrow \frac{q}{25} = \frac{40}{q^2} \Rightarrow q^3 = 1000 \Rightarrow q = \sqrt[3]{1000} = 10$$

Como se pueden producir de 0 a 500 mesas al mes, el punto crítico q = 10 divide el dominio en dos intervalos, veamos si la función crece o decrece en cada intervalo.

- En $(0,10)$ tomamos $q = 5$ y la derivada vale $Q'(5) = \frac{5}{25} - \frac{40}{5^2} = -\frac{7}{5} < 0$.

  El coste medio decrece entre 0 y 10 mesas fabricadas.
- En $(10,500)$ tomamos $q = 20$ y la derivada vale $Q'(20) = \frac{20}{25} - \frac{40}{20^2} = \frac{7}{10} > 0$.

  El coste medio crece a partir de 10 mesas fabricadas.



Por lo que la función coste medio tiene un mínimo en $q = 10$.

El coste medio mínimo es de $Q(10) = \frac{10^2}{50} + 8 + \frac{40}{10} = 2 + 8 + 4 = 14$

3 Donades les funcions $f(x)=-x^2+5 \quad i \quad g(x)=x^2-a, \quad on\ a\in\mathbb{R}$.
a) Trobau tots els possibles valors de *a* perqué *f(x)* i *g(x)* s'intersequin. (3 punts)
b) Per a $a=3$, dibuixau el recinte tancat entre els gràfics de *f(x)* i *g(x)*, identificant els punts d'intersecció. (3 punts)
c) Per a $a=3$, calculau l'área d'aquest recinte interior. (4 punts)

a) Planteamos el sistema formado por las dos funciones en busca de sus puntos de intersección.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+5 \\ g(x)=x^2-a \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=g(x) \Rightarrow -x^2+5=x^2-a \Rightarrow 5+a=2x^2 \Rightarrow x^2=\frac{5+a}{2}$$

Para que tengan punto de intersección debe de poder terminar de despejarse en la igualdad anterior, pero eso solo es posible si $\frac{5+a}{2}\geq 0 \Rightarrow 5+a\geq 0 \Rightarrow a\geq -5$

Las funciones tienen punto o puntos de intersección cuando $a\geq -5$

b) Si $a=3$ las funciones son $f(x)=-x^2+5 \quad y \quad g(x)=x^2-3$.

$$f(x)=g(x) \Rightarrow -x^2+5=x^2-3 \Rightarrow x^2=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Como $f(2)=-2^2+5=1 \quad y \quad f(-2)=-(-2)^2+5=1$

Se cortan en los puntos P(–2, 1) y Q(2, 1).

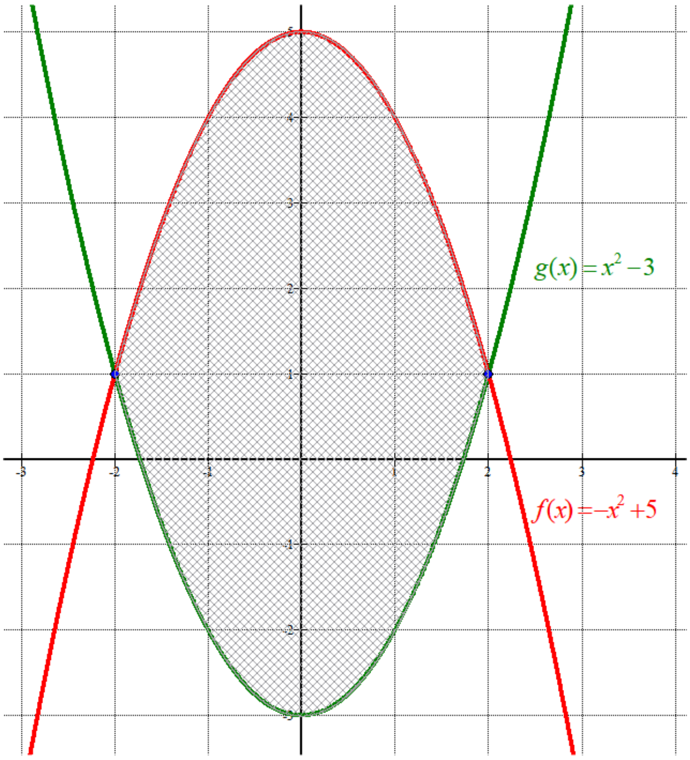
Dibujamos las dos parábolas y el recinto limitado por ellas utilizando una tabla de valores.

$f(x)=-x^2+5$

x	$y=-x^2+5$
–2	1
–1	4
0	5
1	4
2	1

$g(x)=x^2-3$

x	$y=x^2-3$
–2	1
–1	–2
0	–3
1	–2
2	1



c) Mirando el dibujo el área del recinto tiene entre 21 y 22 u². La calculamos con integrales.

$$\int_{-2}^{2} -x^2+5-\left(x^2-3\right)dx=\int_{-2}^{2} -2x^2+8dx=\left[-2\frac{x^3}{3}+8x\right]_{-2}^{2}=\left[-2\frac{2^3}{3}+16\right]-\left[-2\frac{(-2)^3}{3}-16\right]=$$

$$=-\frac{16}{3}+16-\frac{16}{3}+16=\boxed{\frac{64}{3}=21.33\,u^2}$$

4 En una mostra aleatória de 256 individus s'ha obtingut una edat mitjana de 17.4 anys. Se sap que la desviació típica de la població normal de la qual procedeix aquesta mostra és de 2 anys.
a) Obteniu un interval de confiança al 95 % per a l'edat mitjana de la població. (5 punts)
b) Quina ha de ser la mida mínima de la mostra que s'ha de prendre perqué en estimar l'edat mitjana amb un nivell de confiança del 99%, l'error comés sigui inferior a 0.5 anys? (5 punts)

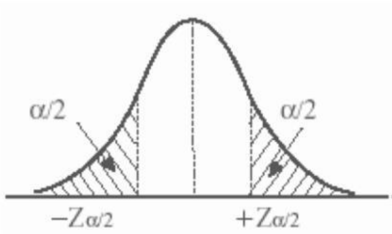
X = Edad de un individuo

X = N(μ, 2)

Una muestra de n = 256 individuos da una media muestral de $\bar{x} = 17.4$.

a) Con un nivel de confianza del 95% tenemos

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$



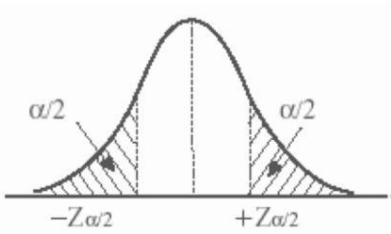
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{256}} = 0.245$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(17.4 - 0.245, 17.4 + 0.245\right) = \left(17.155, 17.645\right)$$

b) Con un nivel de confianza del 99% tenemos

$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}575}$



Si el error debe ser menor de 0.5 años.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 2.575 \cdot 2 = 0.5\sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{2.575 \cdot 2}{0.5}\right)^2 = 106.09$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error de la edad media sea inferior a 0.5 años con una confianza del 99% es de 107 individuos.