UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2018-2019**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá escoger **una** de las dos opciones propuestas y responder razonadamente a las cuestiones de la opción elegida.
Para la realización de esta prueba se puede utilizar calculadora, siempre que no tenga NINGUNA de las siguientes características: posibilidad de transmitir datos, ser programable, pantalla gráfica, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, cálculo de derivadas, cálculo de integrales o resolución de ecuaciones. Cualquiera que tenga alguna de estas características será retirada.
CALIFICACIÓN: Cada pregunta se valorará sobre 2 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz A – 2B sea nulo.
b) Determínese si las matrices C y ($C^t \cdot C$), donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
La derivada de una función real de variable real, *f (x)*, viene dada por la expresión:

$$f\,'(x)=2x^2-4x-6$$

a) Obténgase la expresión de la función *f (x)* sabiendo que pasa por el punto (0, 3).
b) Determínense los extremos relativos de la función *f (x)* indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad ($\cup$) y convexidad ($\cap$) de esta función.

Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que
$P(A)=0'6,\ P(B)=0'8\ y\ P\left(A\cap\overline{B}\right)=0'1$.
a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso *A* si no ha ocurrido el suceso *B* y determínese si los sucesos *A* y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso *B*.
b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, *A* o *B*.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.
a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2% para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

Ejercicio 1. (Calificación máxima: 2 puntos)
Se consideran las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Obténgase el valor de la constante k para que el determinante de la matriz A – 2B sea nulo.
b) Determínese si las matrices C y ($C^t \cdot C$), donde C^t denota la matriz traspuesta de C, son invertibles. En caso afirmativo, calcúlense las inversas.

a)

$$A-2B=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A-2B=\begin{pmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A-2B|=\begin{vmatrix} k-2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2k-4-24-1=2k-29$$

$$|A-2B|=0 \Rightarrow 2k-29=0 \Rightarrow \boxed{k=\frac{29}{2}}$$

b) C no es invertible, pues no es cuadrada.
Veamos cómo es $C^t \cdot C$.

$$C^t \cdot C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+1 & 1 \\ 1 & 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \cdot 3}\times 2 \rightarrow 2\times 2$$

$C^t \cdot C$ es cuadrada y su determinante vale $|C^t \cdot C|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$

$C^t \cdot C$ es invertible.
Su inversa es:

$$\left(C^t \cdot C\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(C^t \cdot C\right)^t\right)}{|C^t \cdot C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{3}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. (Calificación máxima: 2 puntos)
Una voluntaria quiere preparar helado artesano y horchata de auténtica chufa para un rastrillo solidario. La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas. Como la horchata no necesita leche, sabe que puede preparar hasta 15 litros de helado con la leche que tiene. Para que haya suficiente para todos los asistentes, tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata, en un máximo de 20 horas.
a) Represéntese la región del plano determinada por las restricciones anteriores.
b) Si el beneficio por litro es de 25 euros para el helado y 12 euros para la horchata, obténgase la cantidad de cada producto que se deberá preparar para maximizar el beneficio y calcúlese el beneficio máximo que podría obtenerse.

Llamemos x = número de litros de helado e y = número de litros de horchata.

a) Las restricciones son:
- La elaboración de cada litro de helado lleva 1 hora de trabajo y la elaboración de un litro de horchata 2 horas en un máximo de 20 horas → $x+2y\leq 20$.
- Puede preparar hasta 15 litros de helado → $x\leq 15$
- Tiene que preparar al menos 10 litros entre helado y horchata → $x+y\geq 10$
- Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Resumiendo todas las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\leq 20 \\ x\leq 15 \\ x+y\geq 10 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujemos las rectas asociadas a estas inecuaciones:

Tenemos que deducir cual es la región factible.
Probamos con el punto (12, 1) y vemos que cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 12+2\leq 20 \\ 12\leq 15 \\ 12+1\geq 10 \\ 12\geq 0 \\ 1\geq 0 \end{array}\right\}$$

La región factible es la sombreada de la imagen:

b) La función beneficio es $B(x,y)=25x+12y$. Si deseamos maximizarla, debemos decidir cuál de los vértices de la región factible nos da más beneficio.
A(0, 10); B(10, 0); C(15, 0); D es el punto de corte de la recta $x=15$ y la recta $x+2y=20$.
Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x=15 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow 15+2y=20 \Rightarrow 2y=5 \Rightarrow y=\frac{5}{2}=2{,}5 \text{ El punto D(15, 2´5)}$$

$$A(0,\ 10)\rightarrow B(0,10)=0+120=120€$$

$$B(10,\ 0)\rightarrow B(10,0)=250+0=250€$$

$$C(15,\ 0)\rightarrow B(15,0)=375+0=375€$$

$$D(15,2´5)\rightarrow B(15,2´5)=375+30=405€$$

El máximo beneficio se obtiene para el punto D(15, 2´5), que significa 15 litros de helado y 2,5 litros de horchata. Consiguiendo un beneficio de 405 €.

Ejercicio 3. (Calificación máxima: 2 puntos)
La derivada de una función real de variable real, *f (x)*, viene dada por la expresión:

$$f\,'(x) = 2x^2 - 4x - 6$$

a) Obténgase la expresión de la función *f (x)* sabiendo que pasa por el punto (0, 3).
b) Determínense los extremos relativos de la función *f (x)* indicando si corresponden a máximos o mínimos relativos y estúdiese la concavidad ($\bigcup$) y convexidad ($\bigcap$) de esta función.

a) La función *f (x)* es la integral de la derivada, es decir,

$$f(x) = \int f\,'(x)dx = \int 2x^2 - 4x - 6dx = 2\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} - 6x + C$$

$$f(x) = 2\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C$$

Como además pasa por el punto (0, 3).

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 3 \\ f(x) = 2\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x + C \end{array}\right\} \Rightarrow 3 = 0 + C \Rightarrow C = 3$$

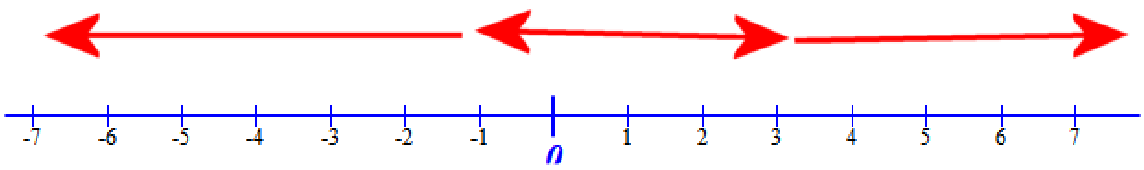
La función es $f(x) = 2\frac{x^3}{3} - 2x^2 - 6x + 3$

b) Para determinar los puntos críticos derivamos (la sabemos) e igualamos a cero.

$$f\,'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} = \frac{2+4}{2} = 3 \\ = \frac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

Veamos el signo de la derivada en las tres partes en que se divide la recta real.

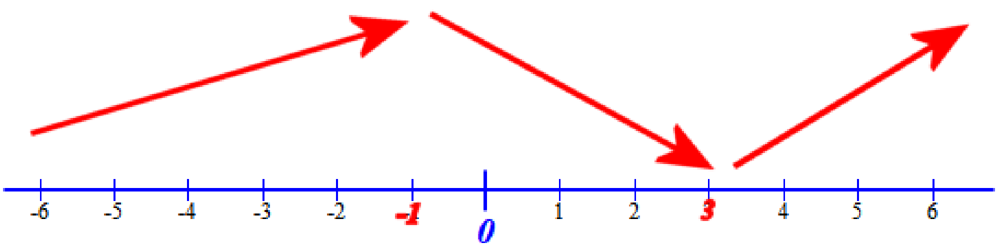


En $(-\infty, -1)$ probamos con –2 y la derivada vale

$f\,'(-2) = 2(-2)^2 - 4(-2) - 6 = 8 + 8 - 6 = 10 > 0$. La función crece.

En $(-1, 3)$ probamos con 0 y la derivada vale $f\,'(0) = 2(0)^2 - 4(0) - 6 = -6 < 0$. La función decrece.

En $(3, +\infty)$ probamos con 5 y la derivada vale $f\,'(5) = 2(5)^2 - 4(5) - 6 = 50 - 20 - 6 = 24 > 0$. La función crece.



En *x = –1* hay un máximo relativo. En *x = 3* hay un mínimo relativo.

Para estudiar la concavidad o convexidad utilizamos la segunda derivada.

$f'(x)=2x^2-4x-6 \Rightarrow f''(x)=4x-4$

$f''(x)=0 \Rightarrow 4x-4=0 \Rightarrow 4x=4 \Rightarrow x=1$

En $x = 1$ hay un punto de inflexión como se aprecia en el esbozo de la gráfica superior.

Es cóncava (∩) en el intervalo $(-\infty,1)$ y convexa (∪) en $(1,+\infty)$.

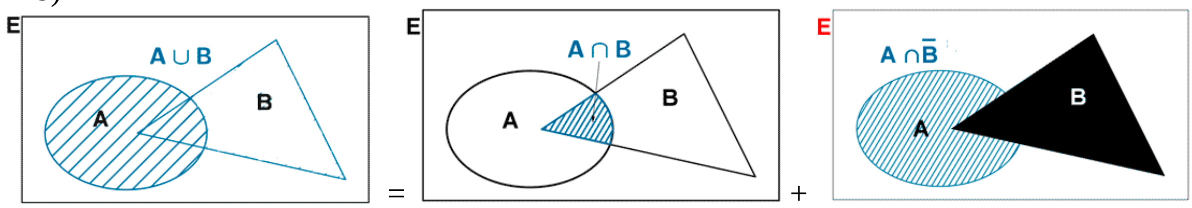
Ejercicio 4. (Calificación máxima: 2 puntos)
Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que
$P(A)=0'6,\ P(B)=0'8 \text{ y } P(A\cap\overline{B})=0'1$.
a) Calcúlese la probabilidad de que ocurra el suceso *A* si no ha ocurrido el suceso *B* y determínese si los sucesos *A* y $\overline{B}$ son independientes. $\overline{B}$ denota el complementario del suceso *B*.
b) Obténgase la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos, *A* o *B*.

a) $P(A/\overline{B})=\dfrac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\dfrac{0'1}{1-0'8}=\dfrac{0'1}{0'2}=0'5$.

Veamos si $P(A\cap\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap\overline{B})=0'1 \\ P(A)P(\overline{B})=0'6\cdot(1-0'8)=0'6\cdot 0'2=0'12 \end{array}\right\}$$ No son iguales y por tanto no son independientes.

b)



$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B}) \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0'6+0'8-0'5=\boxed{0'9}$

OTRA FORMA DE HACERLO

Construimos una tabla de contingencia.

	B	$\overline{B}$	
A		**0,1**	**0´6**
$\overline{A}$			
	0´8		**1**

Completamos la tabla

	B	$\overline{B}$	
A	**0´5**	**0,1**	**0´6**
$\overline{A}$	**0´3**	**0´1**	**0´4**
	0´8	**0´2**	**1**

$P(A\cup B)=0'5+0'3+0'1=\boxed{0'9}$ Es sumar todas las casillas centrales, menos la celda donde coinciden la columna $\overline{B}$ y la fila $\overline{A}$.

Ejercicio 5. (Calificación máxima: 2 puntos)
El precio mensual de las clases de Pilates en una región se puede aproximar mediante una variable aleatoria con distribución normal de media μ euros y varianza 49 euros^2.
a) Seleccionada una muestra aleatoria simple de 64 centros en los que se imparte este tipo de clases, el precio medio mensual observado fue de 34 euros. Obténgase un intervalo de confianza al 99'2% para estimar el precio medio mensual, μ, de las clases de Pilates.
b) Determínese el tamaño muestral mínimo que debería tener una muestra aleatoria simple para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea como mucho de 3 euros, con una confianza del 95 %.

Llamemos X = Precio mensual de las clases de Pilates. X = N(μ, 49)

a) $\bar{x} = 34$ €; $n = 64$

Con el nivel de confianza del 99,2% significa que

$1 - \alpha = 0{,}992 \rightarrow \alpha = 0{,}008 \rightarrow \alpha/2 = 0'004 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}996 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}65}$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(34 - 2{,}65\cdot\frac{34}{\sqrt{64}}, 34 + 2{,}65\cdot\frac{34}{\sqrt{64}}\right)$$

El intervalo de confianza es $(31'68, 36'32)$

b) Para un nivel de confianza del 95% averiguamos $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$

Como el error es 3 € entonces:

$$z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow 1{,}96\cdot\frac{7}{\sqrt{n}} = 3 \Rightarrow 1{,}96\cdot\frac{7}{3} = \sqrt{n} \Rightarrow n = \left(1{,}96\cdot\frac{7}{3}\right)^2 = 20{,}91$$

El tamaño mínimo de la muestra es 21 individuos.