PRUEBA DE ACCESO Y ADMISIÓN A LA UNIVERSIDAD
ANDALUCÍA, CEUTA, MELILLA Y CENTROS en MARRUECOS
CURSO 2018-2019

MATEMÁTICAS II

Instrucciones:

a) Duración: 1 hora y 30 minutos

b) Tienes que **elegir** entre realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción A** o realizar únicamente los cuatro ejercicios de la **Opción B.**

c) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

d) En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

Opción A

Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$, calcula las dimensiones del rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de *f(x)* y la recta $y=0$.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que es derivable, que su función derivada cumple

$$f\,'(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

(ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de *f* pasa por (1,0).

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x \quad\quad +y+2z=0 \\ (m+2)x+y-z=m \\ 3x+(m+2)y+z=m \end{array}\right\}$

a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores de *m*.
b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Se consideran los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ $\vec{v}=(1,-2,-1)$ $\vec{w}=(2,\alpha,\beta)$, donde α y β son números reales.

a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
b) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección.
c) **[1 punto]** Para $\alpha=8$ determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

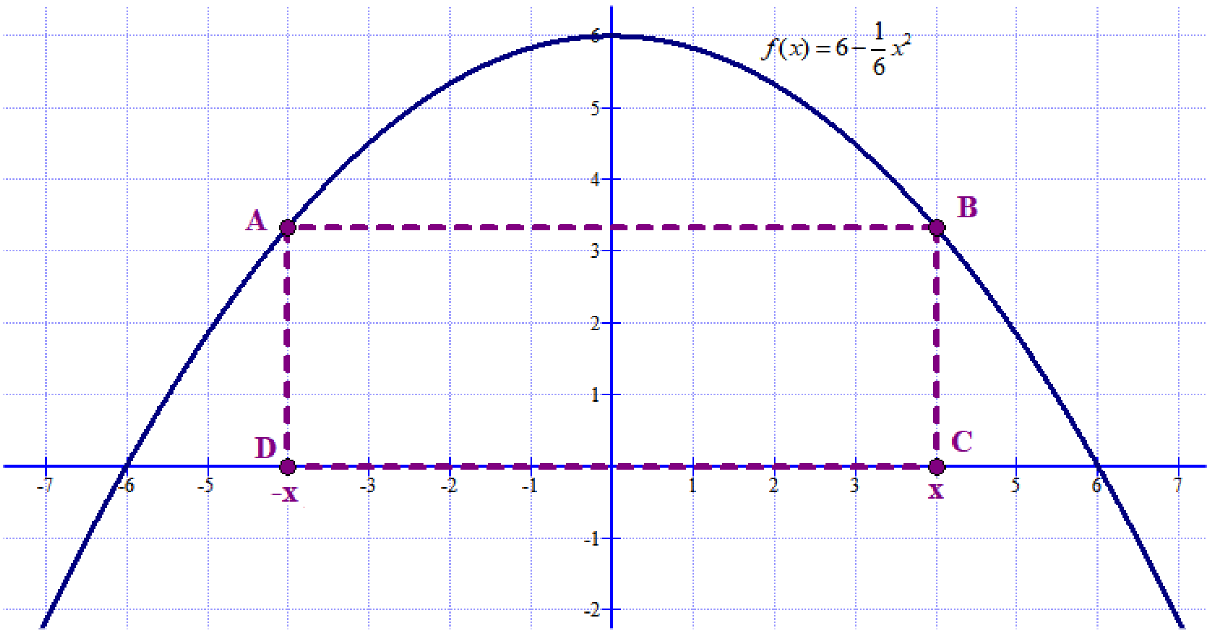
Ejercicio 1.- [2,5 puntos] Dada la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$, calcule las dimensiones del rectángulo de área máxima con lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de *f(x)* y la recta $y=0$.

Vamos a representar la función para observar como es el recinto.

Hacemos una tabla de valores para dibujar la parábola $f(x)=6-\frac{1}{6}x^2$.

x	$y=6-\frac{1}{6}x^2$
0	6
6	0
-6	0
4	$10/3$
2	$16/3$
-4	$10/3$

Su vértice está en x = 0, ya que su derivada es $f\,'(x)=-\frac{1}{6}2x=-\frac{1}{3}x\Rightarrow-\frac{1}{3}x=0\Rightarrow x=0$.



Los vértices del rectángulo tienen coordenadas:

$$A\left(-x,6-\frac{1}{6}x^2\right),\quad B\left(x,6-\frac{1}{6}x^2\right),\quad C(x,0),\quad D(-x,0)\ .$$

El área del rectángulo es:

$$Área(x)=Base\cdot altura=2x\cdot\left(6-\frac{1}{6}x^2\right)=12x-\frac{2}{6}x^3=12x-\frac{1}{3}x^3$$

Derivamos esta función e igualamos a cero en busca del área máxima.

$$Área(x) = 12x - \frac{1}{3}x^3 \Rightarrow Área´(x) = 12 - x^2$$

$$Área´(x) = 0 \Rightarrow 12 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12}$$

Comprobemos si es un máximo sustituyendo en la segunda derivada este valor.

$$Área´(x) = 12 - x^2 \Rightarrow Área´´(x) = -2x$$

$$Área´´\left(\sqrt{12}\right) = -2\sqrt{12} < 0$$

Por lo que en $x = \sqrt{12} = 3,46$ el rectángulo alcanza área máxima.

Calculamos las dimensiones del rectángulo de área máxima:

La base es $2x = 2\sqrt{12} = 4\sqrt{3}$

La altura es la imagen de $\sqrt{12}$ que es $f(\sqrt{12}) = 6 - \frac{1}{6}\left(\sqrt{12}\right)^2 = 6 - \frac{1}{6}12 = 6 - 2 = 4$.

El rectángulo es de base $4\sqrt{3}$ y altura 4.

Ejercicio 2.- [2,5 puntos] Determina la función $f:(0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que es derivable, que su función derivada cumple $f\,'(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y que la gráfica de *f* pasa por (1,0).

Nos piden hallar la primitiva de $f\,'(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ que pasa por (1,0). Es decir tal que *f(1) = 0.*

$$f(x)=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int\ln x\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}dx\left\{\begin{array}{l}\text{Integramos por partes}\\ \text{u}=\ln x\rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx\\ dv=\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx\rightarrow v=\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\end{array}\right\}=$$

$$=\ln x\cdot 2\sqrt{x}-\int 2\sqrt{x}\frac{1}{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{\sqrt{x}}{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-4\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

$$\boxed{f(x)=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+K}$$

Como además sabemos que *f(1) = 0.*Sustituimos y determinamos el valor de K.

$$f(1)=2\sqrt{1}\ln 1-4\sqrt{1}+K=0\Rightarrow -4+K=0\Rightarrow K=4$$

La función pedida es $f(x)=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+4$

Ejercicio 3.- Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x \quad +y+2z=0 \\ (m+2)x+y-z=m \\ 3x+(m+2)y+z=m \end{array}\right\}$

a) **[1,5 puntos]** Discute el sistema según los valores de "m".
b) **[1 punto]** Resuelve el sistema, si es posible, para $m=0$.

a) La matriz de coeficientes asociada y la ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ m+2 & 1 & -1 & m \\ 3 & m+2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

El determinante de la matriz A vale:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m+2 & 1 & -1 \\ 3 & m+2 & 1 \end{vmatrix}=1-3+2(m+2)^2-6-m-2+m+2=-8+2m^2+8+8m=2m^2+8m$$

Igualamos el determinante a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^2+8m=0 \Rightarrow 2m(m+4)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=-4 \end{cases}$$

Hay tres casos distintos a analizar por separado.

CASO 1. $m \neq 0 \ y \ m \neq -4$

En este caso el determinante de la matriz de los coeficientes no se anula y su rango es 3 (el máximo posible) al igual que el rango de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es compatible determinado. Tiene una única solución.

CASO 2. $m=0$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{array}\right\}$$

Se puede observar que la ecuación tercera es la suma de la primera y la segunda, por lo que este sistema es equivalente al que solo tiene la ecuación 1ª y 2ª, que pasamos a resolver.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-2z \\ 2x+y=z \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} \text{ - } 2 \cdot \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{cccc} 2x & +y & = & z \\ -2x & -2y & = & 4z \\ \hline & -y & = & 5z \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-2z \\ -y=5z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=-2z \\ \boxed{y=-5z} \end{array}\right\} \Rightarrow x-5z=-2z \Rightarrow \boxed{x=3z}$$

El sistema es compatible indeterminado. Tiene infinitas soluciones.

CASO 3. $m=-4$

El sistema queda

$$\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ -2x+y-z=-4 \\ 3x+-2y+z=-4 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes asociada es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ que tiene determinante cero. El menor que resulta de quitar la fila y columna 3ª es no nulo. $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1+2=3\neq 0$. El rango de A es 2.

La matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$. Calculamos el valor del menor que resulta de quitar la 3ª columna. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix}=-4-12-8-8=-32\neq 0$. El rango de A/B es 3.

Como rango de A ≠ rango de A/B el sistema es incompatible. No tiene solución.

b) La solución para m = 0 la hemos hallado en el caso 2 del apartado a) y dicha solución es $x=3t;\ y=-5t;\ z=t$ siendo $t\in\mathbb{R}$

Ejercicio 4.- [2,5 puntos] Se consideran los vectores $\vec{u}=(1,2,3)$ $\vec{v}=(1,-2,-1)$ $\vec{w}=(2,\alpha,\beta)$, donde α y β son números reales.

a) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{w}$ sea ortogonal a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) **[0,75 puntos]** Determina los valores de α y β para los que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección.

c) **[1 punto]** Para $\alpha=8$ determina el valor de β para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

a) El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es ortogonal a ambos, por lo que el vector $\vec{w}$ debería tener esa misma dirección, es decir, sus coordenadas deben ser proporcionales al producto vectorial.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2i+3j-2k-2k+j+6i=4i+4j-4k$$

$$\vec{u}\times\vec{w}=(4,4,-4)$$

Como $\vec{w}=(2,\alpha,\beta)$ debe indicar la misma dirección sus coordenadas deben ser proporcionales.

$$(4,4,-4)\,||\,(2,\alpha,\beta)\Rightarrow\frac{4}{2}=\frac{4}{\alpha}=\frac{-4}{\beta}\Rightarrow\begin{cases}\frac{4}{2}=\frac{4}{\alpha}\Rightarrow 4\alpha=8\Rightarrow\boxed{\alpha=2}\\ \frac{4}{2}=\frac{-4}{\beta}\Rightarrow 4\beta=-8\Rightarrow\boxed{\beta=-2}\end{cases}$$

La solución es $\alpha=2\ y\ \beta=-2$

OTRA FORMA DE HACERLO

Como $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$ su producto escalar es cero →

$$\vec{w}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow(2,\alpha,\beta)(1,2,3)=0\Rightarrow 2+2\alpha+3\beta=0\Rightarrow 2\alpha+3\beta=-2$$

Como $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{v}$ su producto escalar es cero →

$$\vec{w}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(2,\alpha,\beta)(1,-2,-1)=0\Rightarrow 2-2\alpha-\beta=0\Rightarrow -2\alpha-\beta=-2$$

Debemos de resolver el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r}2\alpha+3\beta=-2\\-2\alpha-\beta=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 2}^{\text{a}}+\text{Ecuación 1}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}2\alpha & +3\beta & = & -2\\ -2\alpha & -\beta & = & -2\\ \hline & 2\beta & = & -4\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2\alpha+3\beta=-2\\2\beta=-4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2\alpha+3\beta=-2\\\boxed{\beta=-2}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha-6=-2\Rightarrow 2\alpha=4\Rightarrow\boxed{\alpha=2}$$

La solución es $\alpha=2\ y\ \beta=-2$

b) Para que $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tengan la misma dirección deben tener coordenadas proporcionales.

$$(1,-2,-1) \parallel (2,\alpha,\beta) \Rightarrow \frac{2}{1}=\frac{\alpha}{-2}=\frac{\beta}{-1} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{1}=\frac{\alpha}{-2} \Rightarrow \boxed{-4=\alpha} \\ \frac{2}{1}=\frac{\beta}{-1} \Rightarrow \boxed{-2=\beta} \end{cases}$$

La solución es $\alpha=-4 \ y \ \beta=-2$

c)

Si $\alpha=8$ las coordenadas del vector $\vec{w}$ son $\vec{w}=(2,8,\beta)$.

Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(1,-2,-1)$ significa que son vectores linealmente dependientes y el determinante formado por las coordenadas de los tres vectores es nulo.

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & \beta \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -4+24-2\beta-2\beta+8+12=0 \Rightarrow -4\beta=-40 \Rightarrow \boxed{\beta=10}$$

La solución es $\beta=10$

OTRA FORMA DE HACERLO

Si $\alpha=8$ las coordenadas del vector $\vec{w}$ son $\vec{w}=(2,8,\beta)$.

Si $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}=(1,2,3)$ y $\vec{v}=(1,-2,-1)$ significa que existen números p y q tales que $\vec{w}=p\vec{u}+q\vec{v} \Rightarrow (2,8,\beta)=p(1,2,3)+q(1,-2,-1)$. De aquí surge un sistema, que resolvemos:

$$\left.\begin{array}{l} 2=p+q \\ 8=2p-2q \\ \beta=3p-q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2-q=p \\ 8=2p-2q \\ \beta=3p-q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8=2(2-q)-2q \\ \beta=3(2-q)-q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 8=4-2q-2q \\ \beta=6-3q-q \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4=-4q \\ \beta=6-4q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -1=q \\ \beta=6-4q \end{array}\right\} \Rightarrow \beta=6-4(-1)=6+4=10 \Rightarrow \boxed{\beta=10}$$

La solución es $\beta=10$